Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

CÁLCULO II - Agrupamento 3

Soluções do 1.º Teste de Avaliação Discreta (de 10 de abril de 2019)

---

1. O raio de convergência é $\frac{2}{3}$ e o intervalo de convergência é $]\frac{1}{3}, \frac{5}{3}[$.

2. (a) $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\, x^{2n+3}$ e $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+3)}{n!}\, x^{2n+2}$, $x \in \mathbb{R}$.

   (b) A soma da série é $-3 + e^{-1} = \frac{1-3e}{e}$.

3. (a) Para cada $x \neq 1$, existe θ entre 1 e x tal que

$$r(x) = \sqrt[3]{x} = \underbrace{1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{9}(x-1)^2}_{T_1^2 r(x)} + \underbrace{\frac{10}{27 \times 3!}\, \theta^{-\frac{8}{3}}(x-1)^3}_{R_1^2 r(x)}.$$

   (b) –

4. (a) $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \wedge x \neq y\big\}$ (região plana situada no círculo fechado centrado na origem e raio 1, excetuando os pontos situados na reta de equação $y = x$).

   (b) A curva de nível *zero* é

$$\mathcal{C}_0 = \{(x,y) \in D : f(x,y) = 0\} = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \wedge x \neq y\big\}.$$

   Geometricamente corresponde à circunferência centrada na origem e de raio 1, excetuando os pontos $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ e $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.

5. (a) A função g é diferenciável em $\mathbb{R}^2$ uma vez que g, g'_x e g'_y são todas contínuas nesse conjunto. O vetor gradiente pedido é $\nabla g\left(0, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

   (b) $x + 2y - 2z = 2$.

6. A empresa deverá fabricar 20 unidades do produto A e 10 unidades do produto B (notar que o ponto $(20, 10)$ é maximizante local da função L).

7. (a) Falsa. A série numérica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ é absolutamente convergente (obtém-se considerando $x = 0$ na série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$, o qual faz parte do intervalo de convergência $]1-2, 1+2[=]-1, 3[$).

   (b) Falsa. Se f e f' forem seccionalmente contínuas e se f apresentar uma descontinuidade num ponto x_0, então a soma da sua série de Fourier nesse ponto é dada por $\dfrac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} \neq f(x_0)$.

   (c) Falsa. O Teorema de Weierstrass não é aplicável neste caso, uma vez que o conjunto C não é fechado (observar, a propósito, que h não possui máximo absoluto em C).